PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

Profesor
Fortunato Mendoza

RAZONES

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN

Es la comparación que se puede establecer entre dos cantidades.

En general:

Sean las cantidades a y b

Razón	
Razón Aritmética	Razón Geométrica
$a - b = r$	$\frac{a}{b} = k$

Donde:

a: antecedente
b: consecuente
r: valor de la razón aritmética

k: valor de la razón geométrica

RAZONES

Ejemplos:

1) Las edades de José y María son 42 y 14 años respectivamente

Sea la edad de José : J = 42
y la edad de María : M = 14

Comparando por sustracción:

$$J - M = 28$$

Se afirma:

La edad de José excede a la edad de María en 28 años.

José tiene 28 años más que María.

RAZONES

2) En una aula estudian 24 hombres y 36 mujeres

Sea: # de hombres: H
de mujeres : M

Comparando por división: $\frac{H}{M} = \frac{24}{36}$ $\longrightarrow$ $\frac{H}{M} = \frac{2}{3}$

Se lee:

El número de hombres es al número de mujeres como 2 es a 3

La relación entre el número de hombres y mujeres es de 2 a 3.

El número de hombres y el número de mujeres son entre si como 2 es a 3

Por cada 2 hombres hay 3 mujeres.

PROPIEDADES

1) Sea: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

Se cumple: $\boxed{k = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}}$

Ejemplo:

$\frac{18}{6} = \frac{12}{4} = 3$

$\frac{18+12}{6+4} = \frac{18-12}{6-4} = 3$

2) Sea: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se obtiene: $\boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}}$

$\boxed{\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}}$

$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}}$

Nota:

Sea: $\frac{a}{b} = \frac{21}{12}$

Simplificando: $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ ➡ a = 7k, b = 4k

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES (S.R.G.E.)

Es llamado así al conjunto de razones geométricas, que en común van a tener un mismo valor.

Ejemplo:

$$\frac{18}{9} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = 2$$

Es una serie de tres razones geométricas equivalentes cuyo valor común es 2

Del ejemplo, se cumple:

$18 = 9 \times 2$

$12 = 6 \times 2$

$14 = 7 \times 2$

RAZONES

En general:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n} = k}$$

Donde:

$a_1;\ a_2;\ \ldots\ldots\ a_n$: *antecedentes*

$b_1;\ b_2;\ \ldots\ldots\ b_n$: *consecuentes*

K : constante de proporcionalidad

Se cumple:

$$a_1 = b_1 k$$
$$a_2 = b_2 k$$
$$\vdots$$
$$a_n = b_n k$$

Ejemplo:

Si. $\frac{a}{4} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = k$

Se cumple

$a = 4k$; $b = 7k$; $c = 9k$

RAZONES

Propiedades

Sea la serie $\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n} = k}$

Se cumple:

I. $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n} = k$$

II. $$\frac{a_1 . a_2 \ldots\ldots . a_n}{b_1 . b_2 \ldots\ldots . b_n} = k^n$$

Donde n es el número de razones consideradas

III. $$\frac{{a_1}^m + {a_2}^m + \cdots + {a_n}^m}{{b_1}^m + {b_2}^m + \cdots + {b_n}^m} = k^m$$

Donde m ∈ $\mathbb{Q}$

Ejemplo:

Sea $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = k$

Se cumple

* $\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d} = k$
* $\frac{A+B+C}{a+b+c} = k$
* $\frac{ABCD}{a.b.c.d} = k^4$
* $\frac{ABC}{a.b.c} = k^3$
* $\frac{A^3+B^3+C^3+D^3}{a^3+b^3+c^3+d^3} = k^3$
* $\frac{A^2+B^2+C^2}{a^2+b^2+c^2} = k^2$

Serie de razones geométricas continuas equivalentes

Ejemplo:

$$\frac{64}{32} = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = 2$$

Observación:

Los medios consecutivos son iguales

Ejemplos:

1. Para 3 razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = dk^3 \\ b = dk^2 \\ c = dk \end{cases}$$

En forma práctica:

$$\frac{dk^3}{dk^2} = \frac{dk^2}{dk} = \frac{dk}{d} = k$$

2. Para 4 razones:

$$\frac{dk^4}{dk^3} = \frac{dk^3}{dk^2} = \frac{dk^2}{dk} = \frac{dk}{d} = k$$

PROPORCIÓN

Es la igualdad dos razones de la misma clase que tienen el mismo valor.

I. PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Es aquel que se forma al igualar dos razones aritméticas del mismo valor.

$$\boxed{a - b = c - d}$$

Donde :

a y d : términos extremos

b y c : términos medios

Ejemplo:

$$15 - 13 = 9 - 7$$

Observación: $15 + 7 = 13 + 9$

$$22 = 22$$

De donde podemos concluir que en toda proporción aritmética, se cumple:

$$\boxed{\begin{pmatrix} Suma\ de \\ extremos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Suma\ de \\ medios \end{pmatrix}}$$

PROPORCIONES

Puede ser:

A. Discreta

Cuando los términos medios son diferentes.

Ejemplo: 25 – 18 = 42 – 35

B. Continua.

Cuando los valores de los términos medio son iguales.

Ejemplo: 19 - 15 = 15 - 11

En general:

PROPORCIÓN ARITMÉTICA	
Discreta	**Continua**
a – b = c - d $b \neq c$ d: Cuarta diferencial de a, b y c	a – b = b - c b: media diferencial de a y c c:Tercera diferencial de a y b

II. PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Es aquel que se forma al igualar los valores numéricos de dos razones geométricas.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Donde:

a y d : términos extremos

b y c : términos medios

Ejemplo: $\frac{21}{7} = \frac{15}{5}$

Observación: 21 x 5 = 7 x 15

105 = 105

Conclusión:

$$\boxed{\left(\begin{matrix}Producto\ de\\ extremos\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}Producto\ de\\ medios\end{matrix}\right)}$$

PROPORCIONES

Puede ser:

A. Discreta

Cuando los términos medios son diferentes

Ejemplo: $$\frac{20}{16}=\frac{15}{12}$$

B.Continúa

Cuando los términos medios son iguales

Ejemplo: $$\frac{18}{12}=\frac{12}{8}$$

En general:

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA	
Discreta	**Continua**
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $b \neq c$ d: Cuarta proporcional de a, b y c	$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ b: Media proporcional de a y c. c: Tercera proporcional de a y b.

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

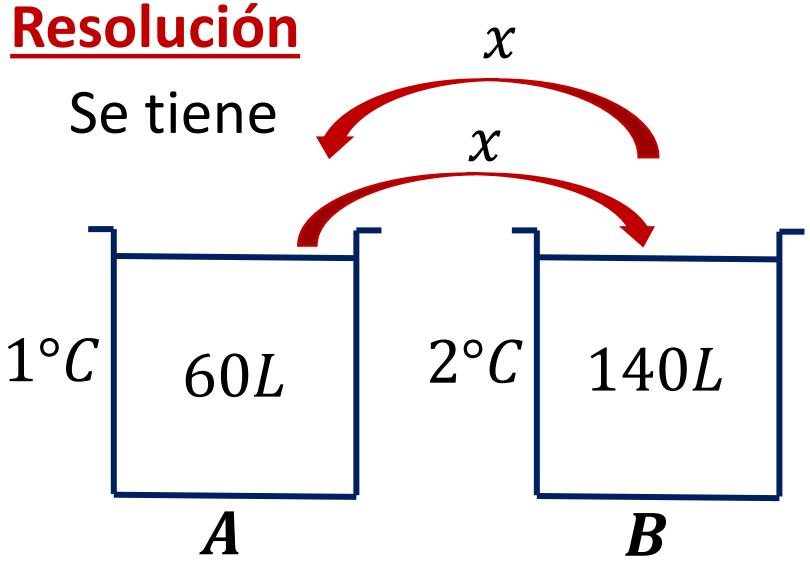
PROBLEMAS

1. Se tiene 2 barriles de vino de distintas calidades, uno con 60 litros y otro con 140 litros. Se saca de cada barril la misma cantidad, y se hecha en el primero lo que se sacó del segundo y se echa en el segundo lo que se sacó del primero. ¿Qué cantidad ha pasado de un barril al otro, si luego el contenido de los dos ha resultado de la misma calidad?

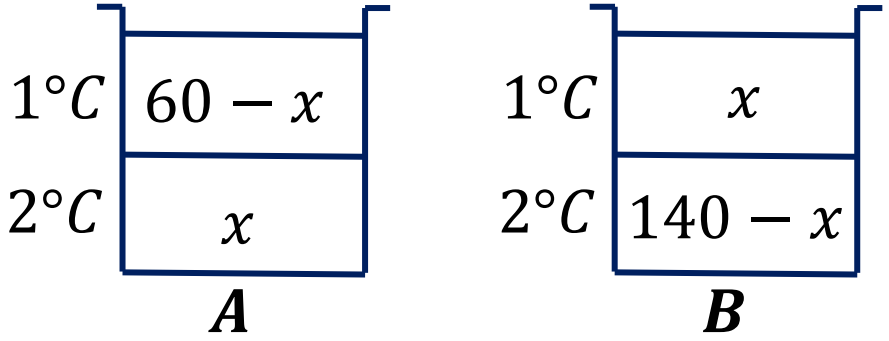
A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

Resolución

Se tiene



Luego del intercambio



Se cumple:

$$\frac{60-x}{x} = \frac{x}{140-x} \rightarrow \frac{60-x}{60} = \frac{x}{140}$$

Resolviendo x = 42

Clave: C

Método Práctico

Se cumple

$$x = \frac{60 \times 140}{60+140} = \frac{60 \times 140}{200} = 42$$

2. Para una carrera de 100 metros. Antonio le gana a Bernardo por 10 m; para otra carrera de 100 metros Bernardo gana a Carlos por 10 m; y para una carrera de 200 metros Carlos gana a David por 40 m. ¿En una carrera de 500 metros por cuántos metros ganará Antonio a David?

A) 176 B) 240 C) 180 D) 160 E) 196

Resolución

Sea A; B; C y D las velocidades de Antonio, Bernardo, Carlos y David respectivamente

Como la relación de velocidades es igual a la relación de espacios recorridos, se cumple

$$\frac{A}{B}=\frac{100}{90} \quad ; \quad \frac{B}{C}=\frac{100}{90} \quad ; \quad \frac{C}{D}=\frac{\cancel{200}^{5}}{\cancel{160}_{4}} \quad ; \quad \frac{A}{D}=\frac{500}{??}$$

Buscando una relación entre A y D

$$\frac{A}{\cancel{B}}\cdot\frac{\cancel{B}}{\cancel{C}}\cdot\frac{\cancel{C}}{D}=\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{5}{4} \rightarrow \frac{A}{D}=\frac{500}{324}$$

Interpretación: Cuando Antonio recorre 500 m, David recorre 324 m

∴ Antonio ganó a David por: 500 – 324 = 176 m

Clave: A

03. Si

$$\frac{120+n}{120-n}=\frac{560+m}{560-m}=\frac{344+p}{344-p}=k$$

Además: m + n + p + 1 = k^2, calcular "m"

A) 520 **B) 525** **C) 100**

D) 80 **E) 120**

Resolución

Se tiene

$$\frac{120+n}{120-n}=\frac{560+m}{560-m}=\frac{344+p}{344-p}=k$$

m + n + p = k^2-1

De la serie: $\frac{120}{n}=\frac{560}{m}=\frac{344}{p}=\frac{k+1}{k-1}$

Se cumple

$$\frac{120+560+344}{n+m+p}=\frac{k+1}{k-1} \rightarrow \frac{1024}{k^2-1}=\frac{k+1}{k-1}$$

k + 1 = 32 ➡ k = 31

Reemplazamos $\frac{560}{m}=\frac{32}{30}$

$\therefore m=525$

Clave: B

04. En una serie de 4 razones geométricas continuas la suma de sus términos no extremos es 56; además la diferencia del tercer término y el tercer consecuente es 12. Calcular la razón aritmética de los extremos.

A) 12 **B) 8** **C) 14**

D) 30 **E) 16**

Resolución

Sea la serie continua

$$\frac{Ck^4}{Ck^3} = \frac{Ck^3}{Ck^2} = \frac{Ck^2}{Ck} = \frac{Ck}{C} = k$$

$2Ck^3 + 2Ck^2 + 2Ck = 56 \rightarrow Ck(k^2 + k + 1) = 28$ ...(1)

$Ck^3 - Ck = 12 \rightarrow Ck(k^2 - 1) = 12$ ...(2)

(1) ÷ (2) $\dfrac{k^2 + k + 1}{k^2 - 1} = \dfrac{7}{3} \rightarrow k = 2$

En (1) $C \,.\, 2 \,.\, 7 = 28 \rightarrow C = 2$

Piden $Ck^4 - C = 2 \,.\, 2^4 - 2 = 30$

Clave: D

5. En una proporción geométrica continua, el producto de sus cuatro términos es 256. Calcular uno de los extremos, sabiendo que la suma de los mismos es la mayor posible. Dar el mayor de ellos.

A) 1 **B) 2** **C) 4** **D) 16** **E) 17**

Resolución

Sea la proporción

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ➡ ac = b^2 ....(1)

a . b^2. c = 256 ➡ b^2. b^2= 256 ➡ $b^4 = 256$ → $b^2 = 16$

b = 4

$(a + c) es\ maximo$

En (1) a . c = 16

2 . 8 ➡ a + c = 10

1 . 16 ➡ a + c = 17 ✓

$Como$ (a + c) es máximo: $a = 1$; $c = 16$

∴ Rpta: 16 **Clave: D**

06. En una proporción geométrica continua la suma de los extremos excede a la suma de los medios en la unidad. Además el producto de sus términos es 1 296. Calcular la suma de la media proporcional y sus extremos.

A) 19 **B) 20** **C) 21**

D) 22 **E) 23**

Resolución

Sea la proporción

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ➡ ac = b^2 ....(1)

(a + c) – (2b) = 1 ....(2)

$a \,.\, b \,.\, b \,.\, c = 1296$ ➡ $b^4 = 1296$ ➡ $b^2 = 36$ ➡ b = 6

En (1) y (2) ac = 36, a + c = 13 } a = 9, c = 4

Piden: $b + a + c = 6 + 13$ = 19

Clave: A

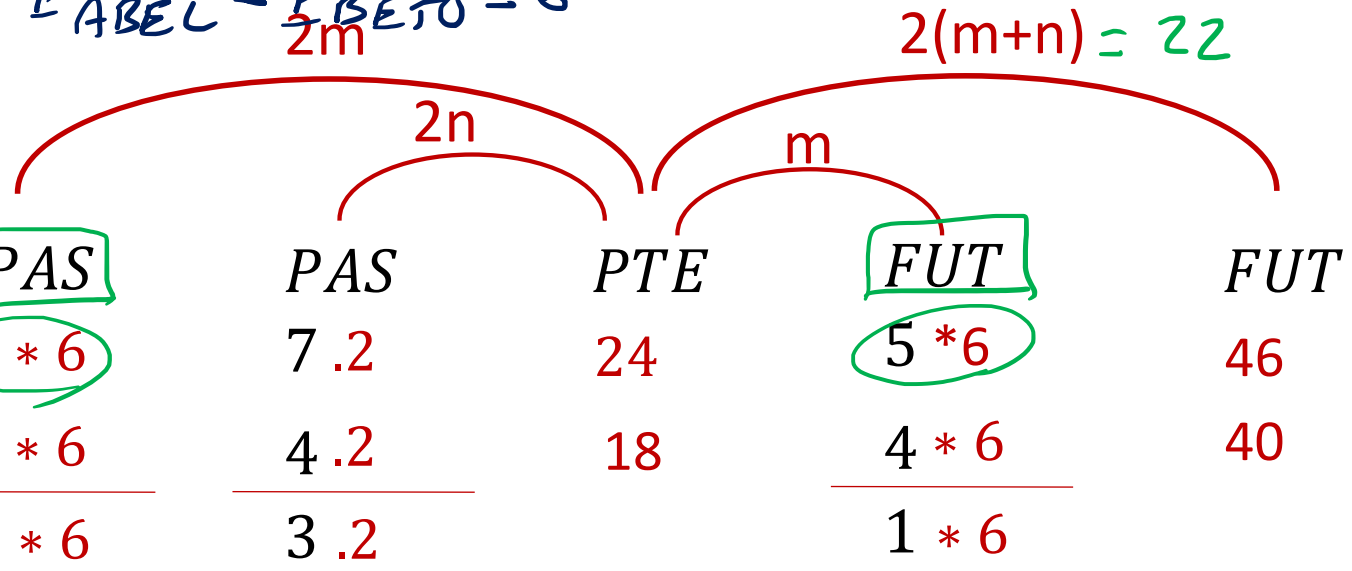
7. Abel nació 6 años antes que Beto. Hace 2n años sus edades eran como 7 es a 4 y hace 2m años eran como 2 es a 1. Dentro de m años serán como 5 es a 4. ¿En qué relación estarán sus edades dentro de 2(m + n) años?

A) 17/20 **B) 21/25** **C) 23/20**

D) 20/27 **E) 19/25**

Resolución

$E_{ABEL} - E_{BETO} = 6$



Se cumple

$2m - 2n = 2$

$2m + m = 18 \rightarrow m = 6$; n = 5

Del esquema

Piden: $\frac{46}{40} = \frac{23}{20}$

Clave: C

8. Determinar los términos de una proporción geométrica discreta, si la suma de ellos es 33, los términos medios son 2 números enteros consecutivos y la suma de los extremos es a la suma de los medios como 6 es a 5. Dar la diferencia de los extremos.

A) 6 **B) 8** **C) 10**

D) 12 **E) 14**

Resolución

Sea la proporción

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ➡ ad = bc ....(1)

a + b + c + d = 33 ....(2)

$b\ y\ c\ son\ consecutivos$

$\frac{a+d}{b+c} = \frac{6}{5}$ ➡ a + d = 6k

b + c = 5k

En (2) k = 3 ➡ $a + d = 18$

$b + c = 15$ ➡ b= 8

c = 7

En (1) a . d = 56 ➡ a = 14 ; d = 4

$Piden$ $a - d = 10$

Clave: C

PROBLEMAS

9. En una proporción geométrica de términos enteros y positivos, la diferencia de los medios es 14. Determine los términos si se sabe que el producto de los 4 términos de la proporción es 2 601. Dar la suma de los extremos.

A) 20 **B) 25** **C) 40**

D) 52 **E) 56**

Resolución

Sea la proporción

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ➡ ad = bc

b – c = 14

$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = 2601$ ➡ $(b \,.\, c)^2 = 2601$

$b \,.\, c = 51$ ➡ $b = 17$; c = 3

También ad= 51 ➡ $a = 51$; d = 1

$Piden$ $a + d = 52$ **Clave: D**

10. En una proporción aritmética continua, los extremos son entre sí como 7 es a 3. Si 10 es la tercera proporcional de la suma de los extremos y la media diferencial de la proporción inicial, calcular la suma de los extremos de la última proporción.

A) 50 **B) 20** **C) 30**

D) 40 **E) 56**

Resolución

Sea la proporción

$$\underset{7k}{a} - b = b - \underset{3k}{c} \rightarrow b = 5k$$

$$\frac{10k}{5k} = \frac{5k}{10} \rightarrow k = 4$$

$$Piden \quad 10k + 10 = 40 + 10 = 50$$

Clave: A

PROBLEMAS

RESPUESTAS									
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	D	E	A	A	C	C	D	C

11. En una librería hay momentáneamente solamente libros de Aritmética, Álgebra y Trigonometría, se sabe que por cada 3 libros de Aritmética hay 4 de Álgebra, y por cada 3 libros de Álgebra hay 2 de Trigonometría. Si en total hay 638 libros., ¿cuántos libros de Aritmética tiene dicha librería?

A) 319 B) 264 C) 96 D) 198 E) 246

Resolución

$$\frac{A}{X} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{X}{T} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{4} = \frac{12}{8}$$

$A = 9k$

$X = 12k$

$T = 8k$

$$\underbrace{A + X + T}_{} = 638$$

$29k = 638 \rightarrow k = 22$

Piden $A = 9(22) = 198$

12. La velocidad de un hombre es a la de un ciclista como 1 es a 3. En una carrera alrededor de un circuito en la que intervienen los dos además un motociclista, este último le saca 6 vueltas de ventaja al ciclista y 12 vueltas al hombre. ¿En qué relación se encuentran las velocidades del hombre y el motociclista?

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/5 D) 1/3 E) 1/6

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{e_1}{e_2}}$$

Resolución

$$\frac{V_H}{V_C} = \frac{1}{3}$$

	# vueltas
H	$x-6$
C	x
M	$x+6$

Se cumple

$$\frac{x-6}{x} = \frac{1}{3} \rightarrow 3x-18 = x$$

$$x = 9$$

Piden

$$\frac{V_H}{V_M} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS

02. En una proporción geométrica continua, la suma de extremos es 75 y la diferencia de los mismos es 21. Halle la media proporcional.

A) 18 B) 24 C) 32
D) 30 E) 36

Resolución

Sea $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow ac = b^2$

$a + c = 75$ --- (1)
$a - c = 21$ (+)

$2a = 96 \rightarrow a = 48$

En (1) $48 + c = 75 \rightarrow c = 27$

Reemp. $48 \cdot 27 = b^2 \rightarrow 1296 = b^2 \rightarrow b = 36$

PROBLEMAS

03. Si: $\frac{a^2}{12}=\frac{b^2}{27}=\frac{c^2}{48}=\frac{d^2}{75}$ y

$(b+d)-(a+c)=120$, halle a + b + c + d

A) 480 B) 600 C) 700

D) 720 E) 840

Resolución

$$\frac{a^2}{\cancel{12}_{4}}=\frac{b^2}{\cancel{27}_{9}}=\frac{c^2}{\cancel{48}_{16}}=\frac{d^2}{\cancel{75}_{25}}$$

Sacando $\sqrt{\ }$

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5}=k \Rightarrow \begin{cases} a=2k \\ b=3k \\ c=4k \\ d=5k \end{cases}$$

Dato: $(b+d)-(a+c)=120$

$8k-6k=120 \rightarrow 2k=120 \rightarrow k=60$

Piden $a+b+c+d=14k=14(60)=840$